

ПРО АУКСЕТИЧНІ МЕТАМАТЕРІАЛИ З ПОЗИЦІЇ МЕХАНІКИ

Останніми роками в Інституті механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка проводяться дослідження в області механіки ауксетичних матеріалів. Ці дослідження ґрунтуються на новій концепції вибору моделей деформування цих матеріалів. Існуюча останні десятиліття інженерна концепція застосування лінійної моделі вважається дещо некоректною з огляду на значне число експериментальних спостережень ауксетичних матеріалів. Такі спостереження свідчать, що ауксетичні матеріали виявляють властивості ауксетичності лише при великих (скінченних) деформаціях. Тому нова концепція застосування моделей нелінійної механіки матеріалів виглядає доречною, хоча математичний апарат нелінійного підходу є суттєво складнішим від лінійного.

Історично так склалося, що ауксетичні матеріали досліджуються переважно методами молекулярної фізики, інженерного та комп'ютерного моделювання і матеріалознавства. Внесок фахівців з механіки матеріалів виглядає до цього часу дуже малим. Спеціалісти з молекулярної фізики зосереджуються на побудові різноманітних теоретичних моделей внутрішньої структури ауксетиків і комп'ютерного моделювання деформування матеріалів вибраної структури. Вчені-матеріалознавці створюють нові матеріали, які виявляють властивості ауксетичності. Фахівці з різних галузей інженерних наук вивчають елементи конструкцій і конструкції з ауксетичних матеріалів та їх застосування в різних галузях сучасної індустрії. Всю цю спільноту дослідників ауксетичних матеріалів влаштовувала проста і зрозуміла ще з університету лінійна модель теорії пружності деформування ауксетичних матеріалів. У такий спосіб була створена сприятлива ситуація для механіків, які працюють в області нелінійних моделей пружного деформування матеріалів. Сприятливою ситуацією була ще тому, що експерименти з ауксетичними матеріалами показували необхідність використання нелінійних моделей.

Довідка щодо ауксетичних матеріалів як підкласу класу метаматеріалів.

Метаматеріали утворюють великий клас нових матеріалів, які виявляють властивості, не спостережувані при дослідженні класичних матеріалів і таких, що перебували поза межами вивчення класичної теорії. В термін «метаматеріали» вкладають сенс, що ці матеріали є матеріалами після традиційних (traditional, conventional) матеріалів подібно до того як метафізика вважається наукою після фізики. Механічні метаматеріали утворюють підклас метаматеріалів і включають як складову частину ауксетичні матеріали.

Термін «ауксетичний матеріал» був введений Евансом у 1991 році [Evans K.E. Auxetic polymers: a new range of materials. Endeavour **15**, 170-174 (1991)] стосовно матеріалів, у яких відомий у теорії пружних матеріалів коефіцієнт Пуассона виявлявся від'ємним. Ця властивість не спостерігається в традиційних матеріалах і її вважають основною властивістю ауксетичності. На даний момент використовується більш короткий термін «ауксетик». Обидва слова походять від грецького слова αυξητικός (той, що намагається зростати). Фактично першими реальними матеріалами з властивістю ауксетичності були піноподібні матеріали (піни). Піни характеризуються дуже малою густиною порівняно з інженерними матеріалами і пористою внутрішньою структурою. Поділяються піни на традиційні і ауксетичні. Поділ відбувається за відмінністю внутрішньої структури. На рисунку 1 показана внутрішня структура поліуретано-

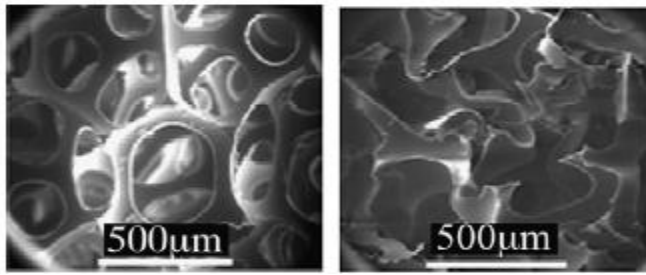


Рис.1

вої піни - зліва структура традиційна, справа – ауксетична [Anurag C., Anvesh C.K., Katam S. Auxetic materials. Int. J. for Research in Appl. Science & Eng. Technology, 2015, 3, N4, P.1176-1183]. У подальших дослідженнях були виявлені нові ауксетичні матеріали, у яких теж густина була малою. Однак виявилось, що мала густина не є визначальною властивістю ауксетиків, оскільки

значна частина піл не має властивості ауксетичності. Визначальною характеристикою ауксетика є особлива внутрішня структура цього матеріалу.

Крім монографії [Lim T.C. Auxetic materials and structures, Springer, Berlin, 2015, 564 p.], існує багато оглядів стану досліджень ауксетиків (Google навіть пропонує окремо опцію “auxetic materials reviews”).

Більш докладно основну властивість ауксетичних матеріалів можна пояснити як здатність пружно деформуватися, проявляючи нетрадиційну властивість збільшувати поперечний переріз циліндричного чи призматичного зразка при одновісному розтязі (зразок стає товстішим), тоді як у традиційних матеріалах цей поперечний переріз зменшується (зразок стоншується). Це показано на рисунку 2 [Anurag C., Anvesh C.K., Katam S. Auxetic materials // Int. J. for Research in Appl. Science & Eng. Technology, 2015, 3, N4, P.1176-1183].

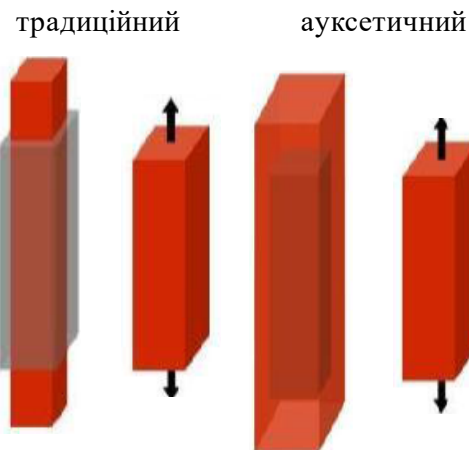


Рис. 2

Річ у тім, що властивість зміни площі поперечного перетину зразка описується в лінійній теорії пружності за допомогою однієї з пружних сталей (констант) матеріалу - коефіцієнта Пуассона (Poisson ratio). Спостереження зменшення поперечного перерізу на збільшення означає зміну додатних значень коефіцієнта Пуассона на від'ємні.

Довідка про коефіцієнт Пуассона. Він означається в лінійній теорії пружності з дослідів про універсальну деформацію одновісного розтягу. Стержень у вигляді прямого довгого циліндра круглого чи квадратного поперечного перетину з віссю Ox_1 розглядається для випадку вільної від напружень бічної поверхні. Вважається, що стержень розтягується у напрямку його осі. Тоді у стержні виникає однорідний напружено-деформований стан за винятком областей біля кінців стержня. Цей стан характеризується лише одним ненульовим компонентом тензора напружень σ_{11} і двома ненульовими компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ (чи двома головними видовженнями $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3$).

Зазначимо, що вказаний дослід є стандартизованим у всіх країнах і цей стандарт не є однаковим (для прикладу, в Німеччині, Франції і Великобританії стандарт є різним) [ASTM E8/E8M-13 (2013): Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials. 28 p.].

В рамках лінійної теорії пружності (за позначеннями Лява [Love A.E.H. The Mathematical Theory of Elasticity. 4th edition. Dover Publications, New York, 1944. 643 p.] дослід описується теоретично рівняннями Ляме для статички і законом Гука (Hooke's law)

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx}, Y_y = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy}, Z_z = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$X_y = 2\mu\varepsilon_{xy}, Z_x = 2\mu\varepsilon_{zx}, Y_z = 2\mu\varepsilon_{yz}.$$

Ці формули дають можливість знайти вирази для модуля Юнга E і коефіцієнта Пуассона σ через модулі Ляме

$$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu), \quad \sigma = -(\varepsilon_{yy}/\varepsilon_{xx}) = -(\varepsilon_{zz}/\varepsilon_{xx}) = \lambda/[2(\lambda + \mu)].$$

З додатності модулів Юнга і зсуву отримується відоме обмеження на коефіцієнт Пуассона

$$-1 < \sigma < 1/2.$$

Отже, стержень в досліді про одновісний розтяг для традиційних матеріалів тоншає у поперечному перетині, тоді як для ауксетичних він грубішає (зразок роздувається). Як правило, розбухання ауксетика демонструється на візуальному рівні, що показано на Рис.3 [Grima J. N. Auxetic metamaterials // European Summer Campus, Strasbourg, France, 2010.–P.1–13. <http://www.auxetic.info/>]. Тут круглий зразок з піни при розтязі збільшується у поперечному перерізі.

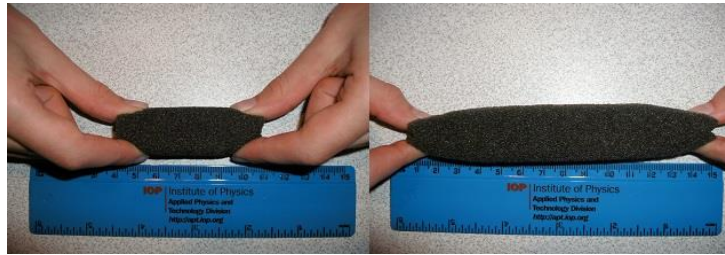


Рис. 3

Для механіки цей дослід є показовим, оскільки деформація зразка досягає приблизно 300%. Така деформація може бути описана лише в рамках нелінійної теорії пружності. Лінійна теорія допускає деформації до 3-4%.

Значна частина досліджень ауксетиків полягає у знаходженні різноманітних варіантів внутрішньої структури, які далі вивчаються методами молекулярної фізики. Найбільш відомою є гексагональна структура (показана на Рис.4, зліва до розтягу справа - після).



Рис. 4

[Anurag C., Anvesh C.K., Katam S. Auxetic materials. Int.J. for Research in Appl. Science & Eng.Technology, 2015, 3, N4, P.1176-1183]. Саме вона приводиться різними авторами для ілюстрації механізму ауксетичності.

Класики механіки про від'ємний коефіцієнт Пуассона. Лінійна теорія пружності допускає розбухання зразка лише у випадку від'ємних значень коефіцієнта Пуассона. Але матеріалів з такою характеристикою століттями практично ніхто не спостерігав і ніхто не згадував про можливість їх існування. Виняток складають два класики – Ляв і Лур'є. Ляв писав, що “якщо $\sigma < -1$, то модуль зсуву μ може бути від'ємним і енергія деформування W не буде квадратичною додатньо означеною функцією. Ми можемо показати, що це також було б так, якби стала k була

від'ємною. Від'ємні значення для σ не виключаються умовою стійкості, але такі значення не були знайдені для будь-якого ізотропного матеріалу.” Лур'є вказував [Lurie A.I. Theory of elasticity, Series: Foundations of engineering mechanics. Springer, Berlin, 2005, 1050 p.]. «розтяг стержня з від'ємним ν може супроводжуватись збільшенням поперечних розмірів».

Перші публікації щодо ауксетиків зв'язували ауксетичність з від'ємністю коефіцієнта Пуассона. Зокрема, роботи Лейкса [Lakes R.S. Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio. Science. 1987, 235, 1038-1040] і Войцеховського [Wojciechowski K.W. Constant thermodynamic tension Monte–Carlo studies of elastic properties of a two-dimensional system of hard cyclic hexamers. Molecular Physics, 1987, 61, 1247-1258] 1987 року затвердили від'ємний коефіцієнт Пуассона як індикатор ауксетичності і вважаються основоположними в області ауксетиків. Переважна більшість вчених (матеріалознавців, фізиків і частково механіків) до цих пір ототожнюють ауксетичність з від'ємністю коефіцієнта Пуассона.

Внутрішня структура матеріалу в механіці. Вона може виявлятися на двох різних стадіях моделювання матеріалу – на стадії заміни дискретної структури матеріалу неперервною (тобто, при введенні поняття континууму згідно з принципом континуалізації) і на стадії моделювання кусково-неоднорідного континууму однорідним континуумом (при застосуванні принципу гомогенізації). Перша стадія звичайно пов'язана з методами молекулярної фізики, тоді як друга є стандартною у механіці композитних матеріалів процедурою. Вказане властиве для всіх матеріалів, які вивчаються у механіці. Для набуття матеріалом властивості ауксетичності його структура повинна змінюватись при деформуванні особливим чином, виявляючи незвичні (нетрадиційні) механічні ефекти. Тут знову слід зазначити, що механіка матеріалів традиційно вивчає спочатку пружне деформування і це стосується як традиційних (неауксетичних), так і нетрадиційних (ауксетичних) матеріалів. Тому що кількість відомих неауксетичних матеріалів на порядки перевищує кількість ауксетичних, то термін «незвичні ефекти» виглядає доречним.

Вказана вище інформація щодо ауксетиків дозволяє стверджувати, що їх означення ґрунтується на вторинному факті – від'ємності коефіцієнта Пуассона, який ще до того є лише терміном з лінійної теорії пружності. Первинний факт полягає в існуванні спеціальної внутрішньої структури матеріалу. Далі буде показано, що деформування ауксетичних матеріалів може бути описане коректно лише моделями нелінійної теорії пружності.

Необхідні факти з нелінійної теорії пружності. В цій теорії первинним поняттям є поняття тіла. Тіло означається як певна область V в просторі R^3 , в кожній точці якого задана густина маси ρ . У такий спосіб реальне тіло, форма якого співпадає з V , замінюється фіктивним тілом як поняттям нелінійної механіки. В R^3 можуть бути задані лагранжева $\{x_k\}$ чи ойлерова $\{X_k\}$ системи координат. Деформація означається як зміна тілом початкової форми. Теорія деформування використовує поняття, пов'язані з геометрією тіла (кінематичні поняття) і поняття, пов'язані з силами, які діють на тіло ззовні і зсередини (кінетичні поняття). До понять кінематики відносять поняття конфігурації χ , вектора зміщень $\vec{u} = \{u_k\}$, головних видозміщень λ_k , тензора деформації ε_{ik} . До понять кінетики відносять зовнішні і внутрішні сили, включаючи тензор напружень. Розрізняють конфігурацію тіла в момент t (актуальна конфігурація) і конфігурацію тіла в початковий момент t^0 (відлікова конфігурація). Координати точки до деформації позначають через x_k і припуска

ють, що після деформації точка зміщується на величину $\xi_k = x_k + u_k(x_1, x_2, x_3, t)$. Вектор з компонентами u_k називають вектором зміщень. Звичайно задається тензор деформації Коші-Гріна в лагранжеві системі координат $\{x_k\}$ і у відліковій конфігурації

$$\varepsilon_{mn}(x_k, t) = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i}u_{m,i}).$$

Опис деформацій дев'ятьма компонентами градієнтів зміщень $u_{i,k}$ не є єдиним. Часто теж використовуються перші три алгебраїчні інваріанти тензора деформації

$$A_1 = \varepsilon_{mn} \delta_{mn}, \quad A_2 = (1/2) \left[(\varepsilon_{mn} \delta_{mn})^2 - \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} \right], \quad A_3 = \det \varepsilon_{mn},$$

які записують через головні значення тензора деформації ε_k за формулами

$$A_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad A_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad A_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.$$

Крім інваріантів A_1, A_2, A_3 , застосовуються інваріанти I_1, I_2, I_3 за формулами

$$I_1 = 3 + 2\varepsilon_{nn} = 3 + 2A_1, \quad I_2 = 3 + 4\varepsilon_{nn} + 2(\varepsilon_{nn}\varepsilon_{mm} - \varepsilon_{nm}\varepsilon_{mn}) = 3 + 4A_1 + 2(A_1^2 - A_2),$$

$$I_3 = \det \|\delta_{pq} + 2\varepsilon_{pq}\| = 1 + 2A_1 + 2(A_1^2 - A_2) + (4/3)(2A_3 - 3A_2A_1 + A_1^3).$$

В деяких моделях нелінійного деформування використовуються коефіцієнти розтягу (головні видовження) $\lambda_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_k}$. У лінійній теорії справедлива простіша формула $\lambda_k - 1 \approx \varepsilon_k$. Теж в нелінійних моделях використовують градієнт зміщення у вигляді

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + u_{3,3} \end{bmatrix},$$

який зв'язаний формулою $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ з лівим тензором деформації Коші-Гріна.

Всі написані вище параметри відносяться до кінематичних параметрів теорії. Кінематичні параметри включають тензори напружень. Найчастіше використовуються симетричний тензор напружень Коші-Лягранжа σ_{ik} , який вимірюється на одиницю площі деформованого тіла, і несиметричний тензор Кірхгоффа, який вимірюється на одиницю площі недеформованого тіла.

Більшість нелінійних моделей первинно задаються пружним потенціалом як функцією кінематичних параметрів. Більшість потенціалів відносяться до класу гіперпружних матеріалів. Гіперпружні матеріали формально характеризуються способом введення конститутивних рівнянь, які впливають з представлення потенціалу у вигляді аналітичної функції кінематичних параметрів.

Деякі нові результати, отримані в Інституті механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка при вивченні ауксетичних матеріалів в рамках концепції нелінійної теорії пружності.

Вказана концепція корелює з результатами експериментів з ауксетичними матеріалами і елементами конструкцій з цих матеріалів. Покажемо далі окремі характерні експериментальні факти. Тут слід зазначити, що у сучасних експериментах з ауксетиками вимірюються прямо або опосередковано величини поперечних і поздовжніх деформацій. Далі їх співвідношення вираховується як коефіцієнт Пуассона чи функція Пуассона.

Добрим прикладом експериментування з ауксетиками є публікація [Fila T, Zlalmal P., Falta J., Doktor T, Koudelka P., Kytir D., Adorna M., Luksch J., Neuhuserova M., Valach J., Jirousk O. Testing of Auxetic Materials Using Hopkinson Bar and Digital Image Correlation. EPJ Web of Conferences DYMAT 2018. 2018: 183, 02045.]. Вибрані для дослідження матеріали – спі

нені алюміній і поліметилметакрилат – належать до нового класу традиційних матеріалів, виготовлених за сучасною технологією спінювання. Метою було виявлення ауксетичності цих матеріалів. Одним з основних результатів є отримання графіків залежності “напруження-деформація” для широкого діапазону значень деформацій від малих до скінченних. Ця залежність показана на рисунку 5 (у авто-рив це рисунок 8).

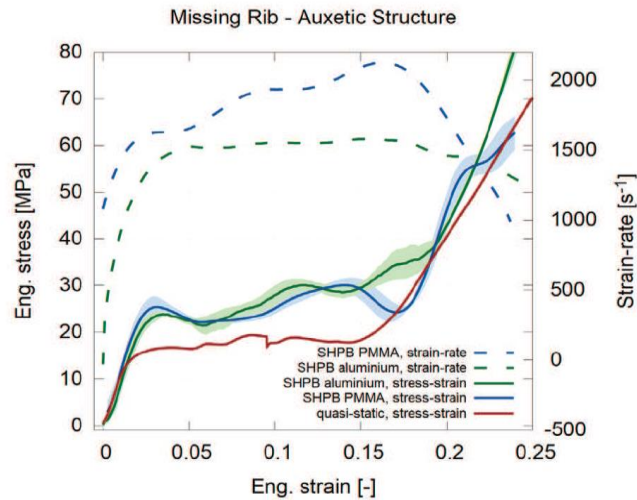


Figure 8
Рис. 5

З рисунка випливає, що експеримент пов'язаний з широким діапазоном деформацій – від малих близьких до нуля до скінченних до 30%. Коментар авторів такий: «Коефіцієнт Пуассона вирахований за допомогою DIC у вибраній області і виявився відємним. Алюмінієві зразки показали дещо нижче значення коефіцієнту Пуассона (біля -0,15), ніж зразки з РММА (біля -0,2)». «Результати ... демонструють дуже глибоку ауксетичну поведінку... Ауксетичну поведінку можна спостерігати аж до номінальної деформації приблизно $\epsilon_{xx} = 0,18$, коли структура зразка перестає проявляти ауксетичну поведінку».

Ці зауваження перебувають в деякому протиріччі з теорією пружності. А саме, як було сказано вище, термін «коефіцієнт Пуассона» дійсно є відношенням поперечної деформації до поздовжньої. Але в теорії пружно-сті цей термін використовується тільки для лінійної теорії, яка справедлива для нескінченно малих деформацій. Таким чином, як випливає з рисунку 5, лінійна залежність «напруження-деформація» справедлива для діапазону деформацій 0,00 – 0,03 і термін «коефіцієнт Пуассона» може бути застосований лише для цього діапазону. З показаного дослідження можна зробити висновок: якщо розуміти термін “Poisson’s ratio” не як пружну константу, а як певне співвідношення, яке змінюється при зміні деформації зразка, то ауксетичність можна відділити від лінійної теорії і вивчати її в рамках нелінійної теорії.

В наступній публікації [Borcea C.S., Broeren F.G.J., Herder J.L., Streinu I., van der Wijk V. Auxetic interval determination and experimental validation for a three-dimensional periodic framework. Mathematics and Mechanics of Solids, 2022, 27(5) 764-774] зразок відповідної форми випробується на стиск. Внутрішня структура зразка дискретна, а його геометрична структура вважається здатною виявити властивість ауксетичності. Кількість повторюваних елементів структури достатня для процедури континуалізації, і тому зразок можна вважати матеріалом. Автори наводять графіки вимірювання залежності поперечних деформацій зразків від поздовжніх деформацій стиску. Один з таких графіків показаний на Рис. 6 (у авторів це Рис. 9). Верхня фотографія зліва відповідає недеформованому стану зразка, нижня – деформованому.

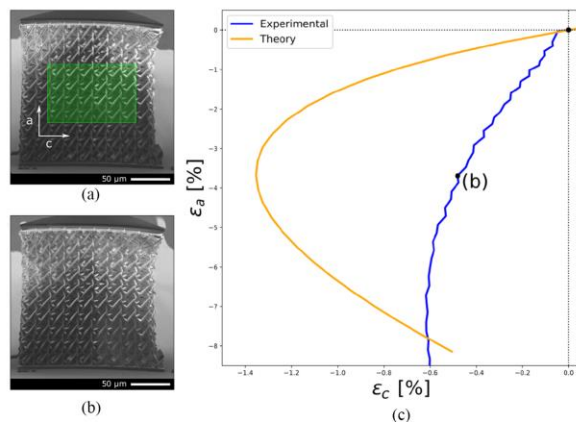


Рис. 6

Рисунок справа показує, що залежність між поздовжною і поперечною деформацією зразка є нелінійною і значення їх відношення є від'ємними. Отже, матеріал є ауксетичним. Ауксетичність матеріалу визначається авторами як механічне явище: при стиску зразка його поперечний переріз зменшується. Термін «коефіцієнт Пуассона» не використовується авторами, оскільки відповідне співвідношення є скоріше функцією Пуассона. Деформації в експерименті не є малими і досягають 8%. Це той рідкісний і незвичайний випадок, коли магія використання терміна «коефіцієнт Пуассона» в будь-який час і всюди не спрацювала.

Ще один приклад аналізу ауксетичних матеріалів [Babaee S., Shim J., Weaver J.C., Chen E.R., Patel N., Bertoldi K. 3D Soft Metamaterials with Negative Poisson's Ratio. *Advanced Materials*, 2015, 25(36), 5044-5049] складається з двох частин. Спочатку пропонується колекція геометричних 3D-об'єктів (названа Bucklicrystal) як будівельні блоки для ауксетичної структури. Три з них показані на рисунку 7 (у авторів частина рисунка 1). Далі формується дискретна структура у вигляді призми макrorівня. Друга частина експериментальна, де реальна призма є зразком для дослідження на одновісний стиск. Досліджено три види зразків дискретної макроструктури (баклікристали з 6, 12 і 24 отворами), виготовлені з силіконової гуми (вінілполісилоксану). На рисунках

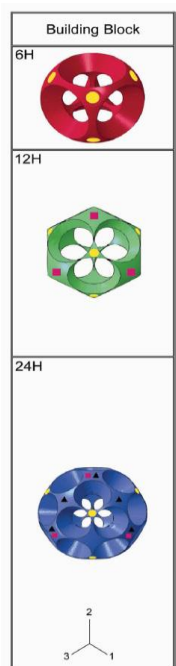


Рис. 7

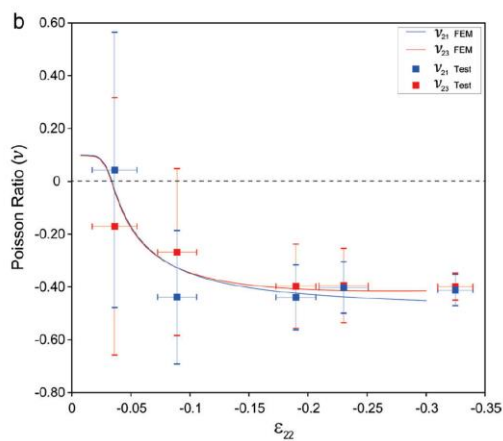


Рис. 8

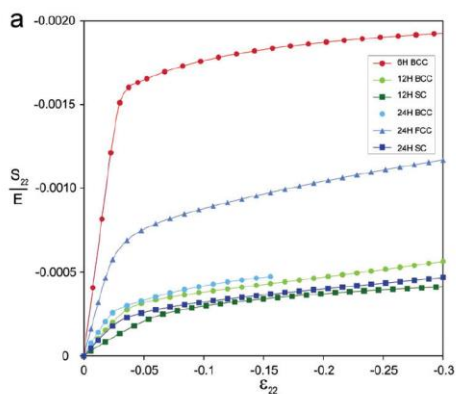


Рис. 9

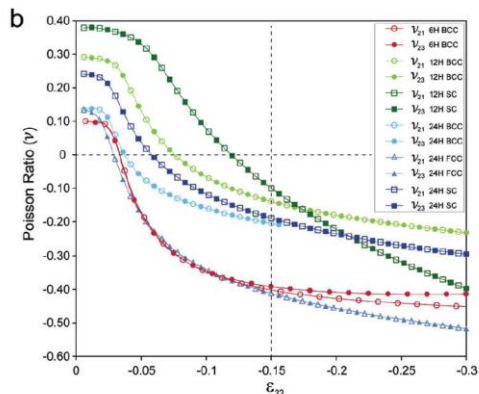


Рис. 10

8 і 10 (у авторів частини рисунків 3 і 4) показана залежність «коефіцієнта Пуассона» від вертикальної деформації для згаданих трьох видів внутрішньої структури зразка. Інші особливості показаних тут рисунків будуть прокоментовані пізніше. На рисунку 9 представлена типова в механіці залежність “поздовжне напруження - поздовжна деформація”, з якої видно, що лінійна залежність відповідна лінійній теорії пружності, спостерігається для дуже малої ділянки з показаного діапазону деформацій. Це означає, що з позиції механіки термін «коефіцієнт Пуассона» може бути використаний лише для цього невеликого діапазону.

Показаний в [Scarpa F., Pastorino P., Garelli A., Patsias S, Ruzzene M. Auxetic compliant flexible PU foams: static and dynamic properties. *Physica Status Solidi B*, 2015, 242 (3). - P.681-694] експеримент є типовим і класичним в аналізі ауксетичних матеріалів. Матеріал вважається ауксетичним, коли одна з його характеристик нетрадиційна – коефіцієнт Пуассона від’ємний. Таким чином, постійна пружності з лінійної теорії пружності переноситься у випадки, коли ця теорія невірна і фактично використовується поняття функції Пуассона. Це стандартна позиція досліджень ауксетичних матеріалів і структур до цього часу. Циліндричні зразки макрорівня були виготовлені зі звичайних сірих пінополіуретанів з відкритими порами та випробувані в умовах одновісного стиску-розтягу. Деякі зразки були випробувані на розтяг, деякі - на стиск. Отримано залежності «розтягуюче напруження–поздовжна деформація», які показують сильну нелінійність для помірних і скінченних деформацій до 80%. Це видно з рисунка 11 (у авторів рис. 7).

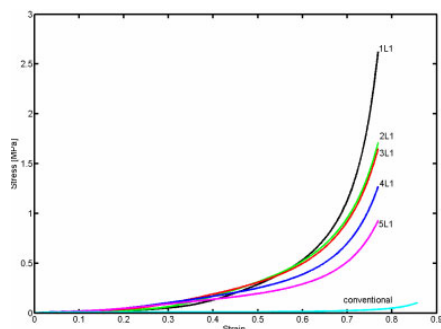


Рис. 11

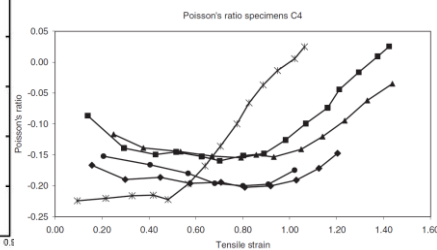


Рис. 12

Коефіцієнт Пуассона (а скоріше, функція Пуассона) вимірювався для помірних і скінченних деформацій у діапазоні [10%,90%]. Залежність коефіцієнта Пуассона від поздовжніх деформацій показана на рисунку 12).

Можливо, головне спостереження з цього експерименту і всіх інших експериментів, показаних раніше, полягає в тому, що в теорії пружності коефіцієнт Пуассона розуміється механіками як механічна константа з лінійної теорії пружності, тоді

як у співтоваристві вчених, які працюють з ауксетичними матеріалами, коефіцієнт Пуассона розглядають як деяку функцію деформацій. Таким чином, коефіцієнт Пуассона перетворюється з механічної константи в деяку функцію, яку можна використовувати як індикатор ауксетичності.

Крім того, з рисунків 8, 10 і 12 можна отримати деякі нові відомості, які не коментуються авторами. З рисунків видно, що для початкової частини досліду на розтяг-стиск (що відповідає не тільки малим деформаціям і лінійній теорії пружності) відношення «поперечна деформація до поздовжньої деформації» слід би називати функцією Пуассона, яка спочатку приймає додатні значення і далі при збільшенні деформації приймає від'ємні значення. Отже, властивість ауксетичності спостерігається тільки для помірних і скінченних деформацій. Таким чином, ауксетичність у зразках може бути описана тільки за допомогою інструментів нелінійної теорії пружності.

Наступний теоретичний аналіз ауксетичних матеріалів проведений в Інституті механіки НАН України ім. С.П. Тисошенка з використанням понять універсальних деформацій. Важливими для інженерної механіки є три типи універсальних деформацій: **одновісний розтяг-стиск, простий зсув, всесторонній стиск**. Ці деформації (однорідні деформації, універсальні стани) займають особливе місце в теорії пружності саме завдяки своїй універсальності [Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. The John Hopkins University, Baltimore, 1972; 2nded., Academic Press, New York, 1991. 352 p.]. Вона полягає в тому, що теоретично і експериментально визначені пружні константи матеріалу в зразках, в яких створюється універсальна деформація, справедливі і для всіх інших деформованих станів як зразків, так і будь-яких виробів з цього матеріалу. Тому стандартизовані дослідні [ASTM E8/E8M-13 (2013): Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials. 28 p.] основані на створенні таких станів.

Щоб реалізувати універсальну деформацію, необхідно виконати дві умови: 1. Рівномірність деформації не повинна залежати від вибору матеріалу. 2. Деформація матеріалу повинна відбуватися за рахунок використання тільки поверхневих навантажень. У лінійній теорії пружності експеримент зі зразком, в якому реалізований простий зсув, дозволяє визначити модуль зсуву μ . Експеримент зі зразком, в якому реалізована одновісний розтяг, дозволяє визначити модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν . Експеримент зі зразком, в якому реалізовано рівномірний стиск, дозволяє визначити об'ємний модуль k . Ця ж процедура зберігається і в нелінійній теорії.

Історична довідка. При переході від лінійної моделі малих деформацій до моделей немалих (помірних або великих), тобто від лінійної механіки матеріалів до нелінійної, універсальні стани дозволяють теоретично і експериментально описати багато нелінійних явищ. Історія механіки свідчить про експериментальне спостереження в XIX столітті нелінійних ефектів, що виникли при простому зсуві і були названі пізніше іменами Пойнтінга (Poynthing) і Кельвіна (Kelvin) [Ogden R.W. Nonlinear Elastic Deformations. Dover, New York, 1997, 544 p. Rushchitsky J.J. Nonlinear elastic waves in materials, Series: Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Heidelberg, 2014, 454 p.] Приблизно через сто років у XX столітті ці ефекти були описані теоретично в рамках нелінійної моделі Муні-Рівліна.

Далі ауксетичні матеріали вивчаються в рамках трьох нелінійних моделей гіперпружного деформування.

Дво-константна неогукова (Neo-Hookean) модель (модель 1). Пружний потенціал цієї моделі задається формулою

$$W = C_1(\bar{I}_1 - 3) + D_1(J - 1)^2, \quad \bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1, \quad J = \det u_{i,k};$$

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = C_1 \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-2/3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 3 \right] + D_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2.$$

Пружні константи моделі зв'язані з класичними пружними константами відношеннями $2C_1 = \mu$; $2D_1 = k$. Конститутивні рівняння мають вигляд

$$\sigma_{nm} = 2C_1 J^{-5/3} [B_{nm} - (1/3)I_1 \delta_{nm}] + 2D_1 (J - 1) \delta_{nm}$$

$$\sigma_{nn} = 2C_1 J^{-5/3} (\lambda_n - (1/3)I_1) + 2D_1 (J - 1),$$

Вважається, що модель 1 описує добре деформування гум при значеннях головних видовжень до 20% від початкового стану. Оскільки видовження зв'язані з головними значеннями тензора деформації формулою $\lambda_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_k}$, то вважається, що вираз $\lambda_k - 1 \approx \varepsilon_{kk}$ вірний наближено з точністю $\leq 1\%$ у випадках універсальних деформацій. Видовження в лінійній теорії на порядок менші. Тому прийнято вважати, що неогукова модель значно розширює область допустимих значень деформацій у порівнянні з гуківською моделлю.

Три-константна модель Муні-Рівліна (Mooney-Rivlin) (модель 2). Пружний потенціал моделі задається формулами

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + D_1(J - 1)^2, \quad \bar{I}_2 = J^{-4/3}I_2,$$

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = C_{10} \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-2/3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 3 \right] +$$

$$+ C_{01} \left[(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-4/3} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2) - 3 \right] + D_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2$$

Пружні константи моделі зв'язані з класичними пружними константами відношеннями $2(C_{10} + C_{01}) = \mu$; $2D_1 = k$. Напруження визначаються таким чином:

$$\sigma = 2J^{-5/3} (C_{10} + C_{01} J^{-2/3} I_1) B - 2J^{-7/3} C_{01} B B +$$

$$\left[2D_1 (J - 1) - (2/3) J^{-5/3} (C_{10} I_1 + 2C_{01} J^{-2/3} I_2) \right] 1$$

$$+ 2C_{01} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-7/3} \left[\lambda_k^2 (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) - (2/3) \lambda_k (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2) \right] + D_1 (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1).$$

(тут індекси k, n, m утворюють циклічну перестановку чисел 123).

П'яти-константна модель Менегена (Murnaghan) (модель 3). Пружний потенціал цієї моделі задається формулами

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2) \lambda (\varepsilon_{nm})^2 + \mu (\varepsilon_{ik})^2 + (1/3) A \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} \varepsilon_{kn} + B (\varepsilon_{ik})^2 \varepsilon_{nm} + (1/3) C (\varepsilon_{nm})^3$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = (1/2) \lambda I_1^2 + \mu I_2 + (1/3) A I_3 + B I_1 I_2 + (1/3) I_1^3.$$

У потенціалі використовуються тензор деформацій Коші-Гріна ε_{ik} і 5 пружних констант (дві константи Ляме λ, μ і три константи Менегена A, B, C). Основана на потенціалі Менегена модель вважається класичною в нелінійній теорії гіперпружних матеріалів і описує деформування великого класу конструкційних та інших матеріалів. Якщо об'єднати дані про константи моделі Менегена, які вказані в

класичних книгах [Lurie A.I. Nonlinear Theory of Elasticity. North Holland, Amsterdam, 2012, 632 p. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. В 2 т. Наука ва думка, Киев, 1986. 376 с., 536 с. Hauk V. (ed) Structural and Residual Stress Analysis. Amsterdam, Elsevier, 1997, (e-variant 2006), 640 p.], то разом це буде інформація про сотні конкретних матеріалів.

Моделі 1-3 адаптовані в Інституті механіки НАН України ім. С.П. Тисошенка до аналізу вказаних раніше трьох універсальних станів і для цих моделей отримано ряд нових теоретичних результатів. Далі показані певні принципіві результати для одновісного розтягу в рамках вибраних нелінійних моделей Крім аналітичних виразів, запропоновано числові результати, основані на виборі характерних матеріалів. Пружні константи матеріалів є такими (в Па):

1. Силіконова гума - $\mu = 20 \cdot 10^9$, $k = 2 \cdot 10^{12}$.
2. Піна - $\lambda = 0.58 \cdot 10^9$, $\mu = 0.39 \cdot 10^9$, $k = 0.84 \cdot 10^9$.
3. Піна - $\lambda = 0.58 \cdot 10^9$, $\mu = 0.39 \cdot 10^9$, $A = -1.0 \cdot 10^{10}$, $B = -0.9 \cdot 10^{10}$, $C = -1.1 \cdot 10^{10}$.
4. Полістирол - $\lambda = 3.7 \cdot 10^9$, $\mu = 1.14 \cdot 10^9$
 $A = -1.1 \cdot 10^{10}$, $B = -0.79 \cdot 10^{10}$, $C = -0.98 \cdot 10^{10}$.

Модель 1. У випадку одновісного розтягу $\lambda_2 = \lambda_3$, $J = \lambda_1 \lambda_2^2$, $I_1 = \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2$ і нормальні напруження задаються формулами

$$\sigma_{11} = (2/3)\mu(\lambda_1 \lambda_2^2)^{-5/3}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1),$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -(1/3)\mu(\lambda_1 \lambda_2^2)^{-5/3}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + k(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1).$$

Розтягуючі в поздовжньому напрямку напруження залежать у моделі 1 від двох головних видовжень - поздовжнього і поперечного. Рис.13 показує залежність напруження σ_{11} від головних видовжень λ_1, λ_2 і побудований для силіконової гуми у припущенні, що значення $(\mu/3k) = 0,00334$ можна вважати дуже малим у порівнянні з одиницею. Тоді $\varepsilon_{22} = (1/2)(1 + 2\varepsilon_{11})^{-2} - 1/2$.

Рис.14 показує залежність видовження λ_1 від видовження λ_2 .

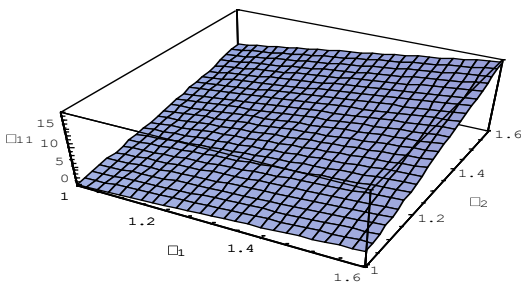


Рис. 13

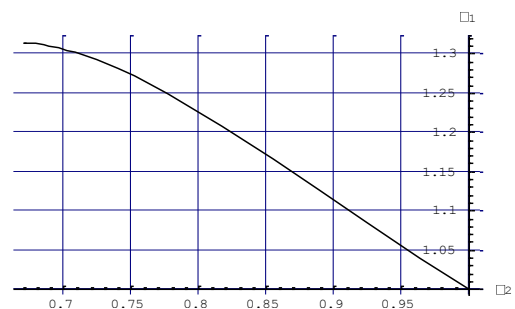


Рис. 14

Зазначимо, що силіконові гуми характеризуються великою відмінністю у значеннях модулів зсуву і всестороннього стиску, яка може досягати сотні разів. Тому для Рис.14 вибраний новий матеріал – піна, яка характеризується приблизно рівними за порядком значеннями пружних констант. Зауважимо, що відношення λ_2/λ_1 відповідає у лінійної теорії коефіцієнту Пуассона. Рис. 14 свідчить, що із збільшенням λ_1 збільшення λ_2 стає повільнішим і видно тенденцію до утворення горба.

Модель 2. Одновісний розтяг характеризується параметрами:

$$\lambda_2 = \lambda_3, \quad J = \lambda_1 \lambda_2^2, \quad I_1 = \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2, \quad I_2 = \lambda_2^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad B_{11} = \lambda_1^2, \quad (BB)_{11} = \lambda_1^4.$$

Нормальні напруження задаються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & 2C_{10}(2/3)(\lambda_1 \lambda_2^2)^{-5/3} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 2C_{01}(\lambda_1 \lambda_2^2)^{-7/3} [\lambda_1^4 + (2/3)\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \\ & - (5/3)\lambda_2^4] + 2D_1(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1), \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 2C_{10}(\lambda_1 \lambda_2^2)^{-5/3} (1/3)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + 2C_{01}(\lambda_1 \lambda_2^2)^{-7/3} \times \\ & \times (1/3)\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + 2D_1(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1). \end{aligned}$$

Теж справедливі формули

$$\lambda_1^6 - \lambda_1^3 / \sigma^2 + \left[(2C_{10} / 6D_1) \sqrt[3]{\sigma^4} + (2C_{01} / 6D_1) \sqrt[3]{\sigma^2} \right] \sigma^{-4} (\sigma^2 - 1) = 0, \quad \sigma = (\lambda_2 / \lambda_1),$$

$$\lambda_1^3 = 1 / 2\sigma^2 \pm 1 / 2\sigma^2 \sqrt{1 - \left[\frac{(2C_{10} / 6D_1) \sqrt[3]{\sigma^4}}{(2C_{01} / 6D_1) \sqrt[3]{\sigma^2}} \right] \sigma^{-4} (\sigma^2 - 1)},$$

Значимо, що в моделях 1 і 2 розтягуюче в поздовжному напрямку напруження σ_{11} залежить від двох головних видовжень. У лінійній моделі воно залежить лише від поздовжного видовження. Залежність σ_{11} від λ_1, λ_2 для випадку силіконової гуми є такою, що зіставлення відповідних рисунків з показаними на Рис.13 і Рис. 14 (для моделі 1) показує, що вони практично ідентичні. Ця ідентичність теж свідчить про те, що константа C_{01} у моделі Муні-Рівліна несуттєво впливає на напруження σ_{11} . Для силіконової гуми ця залежність є слабконелінійною.

Модель 3. Одновісний розтяг характеризується трьома ненульовими компонентами тензора деформації ε_{kk} і одним ненульовим компонентом тензора напружень σ_{11} . Конститутивні рівняння дещо спрощують ся і мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{11} + A(\varepsilon_{11})^2 + B(E + 2\varepsilon_{11} I_1) + C(E + 2\varepsilon_{22} \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{33} \varepsilon_{11}), \\ 0 &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{22} + A(\varepsilon_{22})^2 + B(E + 2\varepsilon_{22} I_1) + C(E + 2\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{22} \varepsilon_{11}), \\ 0 &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{33} + A(\varepsilon_{33})^2 + B(E + 2\varepsilon_{33} I_1) + C(E + 2\varepsilon_{22} \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22} \varepsilon_{33}). \\ I_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad E = (\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2. \end{aligned}$$

Аналогічні рівняння в рамках лінійної гукової моделі значно простіші

$$\sigma_{11} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{11}, \quad 0 = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{22}, \quad 0 = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{33}.$$

З отриманих рівнянь випливає формула

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & E \varepsilon_{11} + \left(A + \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} B + C \right) (\varepsilon_{11})^2 - \\ & - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(A + \frac{4\lambda - 2\mu}{\lambda} B - \frac{2\mu}{\lambda} C \right) (\varepsilon_{22})^2 + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} (B + C) \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

і рівність поперечних деформацій $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$.

Рис. 15 і Рис. 16 показують залежність поздовжного напруження від поздовжньої і поперечної деформацій $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$ для піни (Рис. 15) і полістиролу (Рис. 16) і помірних значень деформацій. Обидва графіки демонструють суттєву нелінійність при помірних деформаціях

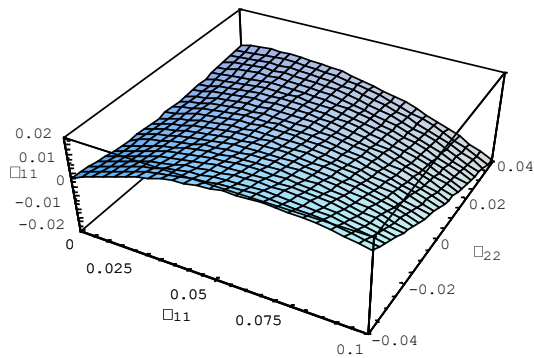


Рис. 15

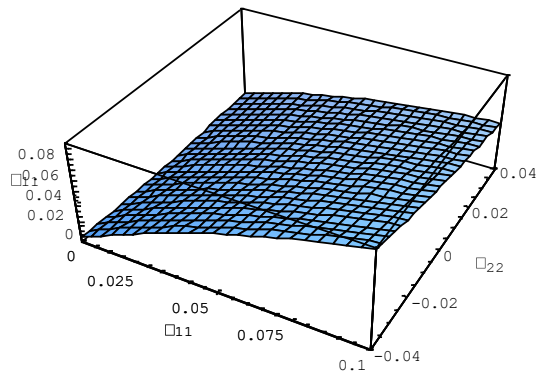


Рис. 16

З отриманих вище рівнянь можна отримати рівняння щодо відношення $\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$

$$\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right)^2 + \frac{2\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{\varepsilon_{11}}\right)+(B+C)\right]}{(A+6B+4C)} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} + \frac{(\lambda/\varepsilon_{11})+(B+C)}{(A+6B+4C)} = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{(\lambda+\mu)/\varepsilon_{11}+(B+C)}{(A+6B+4C)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(A+6B+4C)\left[\lambda/\varepsilon_{11}+(B+C)\right]}{\left[(\lambda+\mu)/\varepsilon_{11}+(B+C)\right]^2}} \right].$$

Отриманий розв'язок показує, що відношення $\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$ не є константою для моделі 3. Графіки на Рис.17 і Рис. 18 побудовані для піни і полістиролу при помірних деформаціях. Головною особливістю обох графіків є те, що відношення $\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11}$ для малих деформацій суттєво зменшується за величиною від додатних початкових значень, які відповідають значенням коефіцієнта Пуассона, до від'ємних при помірних значеннях поздовжньої деформації.

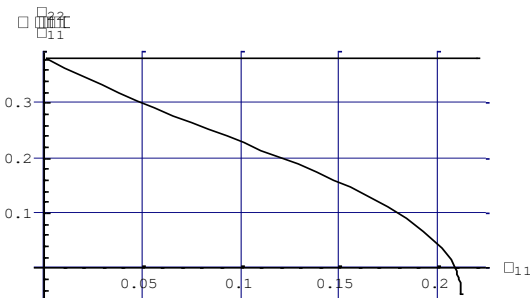


Рис.17



Рис. 18

Таким чином, відношення, яке при малих деформаціях називають коефіцієнтом Пуассона, у випадку помірних деформацій стає характеристикою переходу матеріалу з категорії традиційних матеріалів до категорії нетрадиційних (ауксетичних) матеріалів.

Цей факт може трактуватися як новий спостережений теоретично нелінійний ефект деформування матеріалу.

Іншими словами, аналіз універсальної деформації одновісного розтягу для моделі 3 виявив існування нової властивості матеріалу: **один і той же матеріал при малих деформаціях проявляє властивості традиційного матеріалу і при збільшенні величини деформації до помірних значень проявляє властивості нетрадиційного (ауксетичного) матеріалу.**

Незвичність цього спостереження полягає у тому, що звичайно матеріал вважається або традиційним, або нетрадиційним при всіх значеннях деформацій

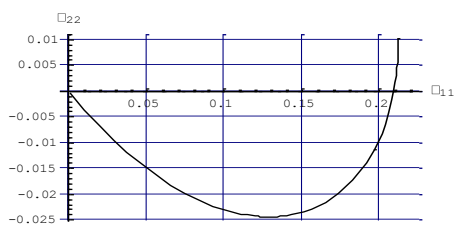


Рис.19

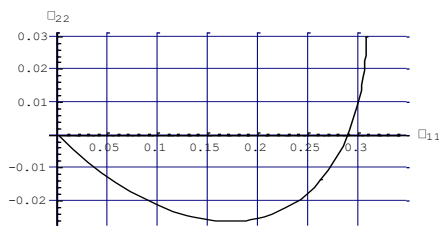


Рис. 20

Порівняємо графіки Рис.17 - 20 з експериментальними даними, які показані на Рис. 12 і стосуються деформування піни, що вивчалися при скінчених деформаціях ε_{11} в діапазоні від 0,1 до 1,4. Зазначимо, що теоретичні графіки побудовані для діапазону від нуля до помірних значень 0,23(піна) і 0,33 (полістирол). Порівняння показує, що відношення $(\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11})$ є додатним до досягнення помірних значень 0,12 -0,17 і далі стає від'ємним в теоретичному аналізі, тоді як для матеріалів, вивчених експериментально, перехід від додатних значень до від'ємних відбувається при менших 0,1 значеннях поздовжньої деформації і далі відношення зменшується. Тобто, якісно картина однакова і модель 3 описує явище переходу матеріалу з одного класу в інший і монотонного зменшення величини $(\varepsilon_{22} / \varepsilon_{11})$ при збільшенні поздовжньої деформації.

Рис. 17-20 показують залежність між поздовжньою і поперечною деформаціями в рамках моделі 3 (зліва графік для піни, справа - полістиролу). Тут можна виділити три факти: 1. Зменшення поперечної деформації ε_{22} сповільнюється при переході до помірних значень (при цьому значення деформації є від'ємними). 2. Деформація ε_{22} досягає локального мінімуму і далі зростає, 3. Зростаючи монотонно від мінімуму, деформація ε_{22} приймає далі нульове значення (тоді поперечний переріз стержня не змінюється) і починає приймати додатні значення (тоді поперечний переріз стержня збільшується).

Спостережена на Рис. 19 і 20 особливість підтверджує ще раз нове механічне явище - перехід матеріалу з однієї категорії у іншу (при малих деформаціях матеріал належить до класу традиційних матеріалів, при помірних деформаціях – до класу нетрадиційних (ауксетичних). Іншими словами, стандартний зразок в умовах універсальної деформації одновісного розтягу деформується так, ніби він зроблений з традиційного матеріалу (його поперечний переріз зменшується) і при зростанні поздовжнього розтягу до помірних значень він деформується так, ніби він зроблений з ауксетичного матеріалу (поперечний переріз починає зростати, що характерно саме для ауксетичних матеріалів).

Графіки Рис. 19 і 20 можна порівняти з графіками Рис. 8 і 10, експериментально отриманими для нових метаматеріалів, виготовлених з м'якої силіконової гуми. Порівняння графіків Рис.19г і 20 показує спільну для обох особливість формування горба в області додатних (від'ємних) значень поперечної деформації, який при зростанні поздовжньої деформації до помірних значень продовжується у вигляді прямої лінії в область від'ємних (додатних) значень поперечної деформації.

Таким чином, три застосовані в аналізі нелінійні моделі описують деякі нелінійні явища, які спостерігаються в експериментах з ауксетичними матеріалами при помірних деформаціях. Нове явище залежності особливостей деформування матеріалу від рівня деформації (малої чи помірної) явно видиме лише в рамках моделі Менегена, тоді як неогукова модель і модель Муні-Рівліна лише схоплюють тенденцію розвитку нового явища. **Отже, моделі нелінійної механіки являють собою природний наступний крок в розвитку теорії ауксетиків і в певних обставинах можуть бути досить корисними для адекватного опису явища ауксетичності.**