doi: https://doi.org/10.15407/visn2016.12.063

НОВІ ФАЗИ КВАНТОВОЇ МАТЕРІЇ І ТОПОЛОГІЯ

Нобелівська премія з фізики 2016 р.

КРІВЕ Ілля Валентинович — доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу теоретичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

ШЕВЧЕНКО Сергій Іванович — доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу теоретичної фізики Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України

Нобелівську премію з фізики в 2016 р. було присуджено Д. Таулессу, Д. Холдейну і Дж.М. Костерліцу за «теоретичні відкриття топологічних фазових переходів і топологічних фаз матерії». У статті наведено основні ідеї і результати робіт, у яких було теоретично передбачено топологічні фазові переходи у двовимірних конденсованих середовищах (фазові переходи Березинського—Костерліца—Таулесса), знайдено зв'язок квантування холлівської провідності з топологічною характеристикою (інваріантом Черна) двовимірних провідних систем з порушеною Т-інваріантністю (Таулесс—Комото—Найтінгейл—ден Нійс—Холдейн) і передбачено нову квантову фазу (фазу Холдейна) одновимірних спінових ланцюжків із цілим спіном. При викладенні матеріалу основну увагу автори приділяють якісному поясненню нових явищ і простежують зв'язок між цитованими роботами нобелівських лауреатів та низьковимірними моделями релятивістської квантової теорії поля, де вперше обговорювалася роль топологічних інваріантів у квантовій фізиці.

Ключові слова: топологічні фазові переходи, топологічні фази, топологічні інваріанти, холлівська провідність, спінові ланцюжки.

Щороку в жовтні Нобелівський комітет присуджує премії видатним ученим за зроблені ними раніше (іноді набагато раніше) наукові відкриття, які стали значним внеском у світову науку. Церемонія нагородження за традицією відбувається 10 грудня, у день смерті Альфреда Нобеля. Цього року Нобелівської премії з фізики було удостоєно трьох британських учених, які живуть і працюють у США, — Девіда Таулесса (David James Thouless), Дункана Холдейна (Duncan Haldane) і Джона Майкла Костерліца (J. Michael Kosterlitz) — з формулюванням: «за теоретичні відкриття топологічних фазових переходів і топологічних фаз матерії». Премію присуджено не за якесь одне конкретне відкриття, а за роботи в різних галузях фізики конденсованого стану.

Дж.М. Костерліц і Д. Таулесс вказали на можливість існування у двовимірних системах незвичайного дальнього порядку — так званого *топологічного порядку*. Вони передбачили у таких системах фазовий перехід повністю нового типу, в якому вирішальну роль відіграють топологічні дефекти (квантовані вихо-

Девід Таулесс
(David James Thouless)

Дункан Холдейн
(Duncan Haldane)

Джон Майкл Костерліц
(J. Michael Kosterlitz)

ри, дислокації, дисклінації та ін.). Їхня теорія описує низькотемпературні властивості двовимірних кристалів, надплинних і надпровідних систем, магнітних плівок. Девід Таулесс з колегами Комото, Найтінгейлом, ден Нійсом, використовуючи топологічні концепції, вказали на причину квантування холлівського кондактансу двовимірного електронного газу з безпрецедентною для фізики твердого тіла точністю. Вони показали, що кондактанс можна пов'язати зі «зв'язністю Беррі», яка є похідною в параметричному просторі від хвильової функції системи і інтеграл від якої є топологічним інваріантом (інваріантом Черна). Цим пояснюється надзвичайна стійкість квантування кондактансу відносно форми зразка і наявності домішок.

Дункан Холдейн побудував теорію одновимірних спінових систем і показав, що властивості таких систем кардинально відрізняються від властивостей аналогічних систем вищої розмірності. На основі топологічних міркувань він показав, що ланцюжки з цілим і півцілим спіном повинні мати якісно різні властивості.

Топологічні фазові переходи

З переходами з одного макростану в інший, або, як кажуть фізики, з фазовими переходами, ми стикаємося навіть у повсякденному житті. Прикладом такого фазового переходу є кристалізація рідини при зниженні температури. Ми спостерігаємо лише зміну макроскопічних властивостей системи при переході через температуру кристалізації, але пізніше дізнаємося, що при кристалізації кардинально змінюється мікроскопічна картина: хаотичний рух атомів рідини замінюється впорядкованим розташуванням атомів у кристалі. Виниклий у системі порядок можна описати, задавши три вектори, які не лежать в одній площині. При трансляціях кристала на ці вектори він збігається сам із собою.

Іншим прикладом фазового переходу є перехід з парамагнітного у феромагнітний стан. При цьому спіни електронів, орієнтовані в парамагнітній фазі хаотично, утворюють впорядковану систему. У феромагнетику виникає спонтанний магнітний момент у напрямку переважної орієнтації спінів. Величина магнітного моменту є кількісною мірою порядку, що виникає в системі.

Третім прикладом, важливим для подальшого викладення, є перехід рідини або газу з нормального стану в надплинний. Цей фазовий перехід спостерігається в ізотопах гелію і в парі лужних металів. Нижче температури переходу рідина або газ втрачають в'язкість, і виникає питання: яким параметром порядку описувати надплинну фазу. Цим параметром порядку є комплексна функція $\psi(\mathbf{r})$, квадрат модуля якої збігається з надплинною щільністю $\rho_s(\mathbf{r})$, а фаза $\phi(\mathbf{r})$ пов'язана з надплинною швидкістю $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = (\hbar / m)\nabla\phi(\mathbf{r})$, де m — маса атома, $\hbar$ — стала Планка.

Щоб зрозуміти, як стан макроскопічної системи може описуватися комплексним параметром порядку, слід згадати, що в системі бозе-частинок за низьких температур має місце явище бозе-конденсації. Це явище полягає в тому, що макроскопічне число бозонів займає один квантовий стан. Однак у квантовій механіці стан частинки слід описувати за допомогою хвильової функції $\psi(\mathbf{r})$, яка визначає ймовірність знаходження частинки в точці $\mathbf{r}$. А оскільки кількість частинок у певному стані макроскопічно велика, то опис з імовірнісного переходить у достовірний.

Хоча нижче температури фазового переходу в системі відбувається впорядкування, завжди мають місце теплові та квантові флуктуації, які призводять до зменшення величини параметра порядку. У кристалах довгохвильові коливання щільності (фонони) спричинюють зростання квадрата амплітуди відхилення атома з положення рівноваги. У магнітних системах зменшення параметра порядку відбувається завдяки переміщенню по системі спінових відхилень від рівноважного напрямку (їх називають *спіновими хвилями*). У надплинних системах зменшення надплинної щільності пов'язане з фононами і особливим видом збуджень — *ротонами*.

Опис стану системи за допомогою параметра порядку припускає, що флуктуації є малими і вони лише зменшують величину параметра порядку, але не руйнують порядок повністю. Питання про вплив флуктуацій на можливість існування двовимірних і одновимірних кристалів багато років тому було розглянуто Пайєрлсом [1] і Ландау [2], які показали, що завдяки довгохвильовим фононам середній квадрат відхилення атомів з положення рівноваги у двовимірних кристалах логарифмічно зростає зі зростанням розміру кристала. Це означає, що довгохвильові фонони руйнують кристалічний порядок у двовимірних системах. Пізніше Мермін, Вагнер [3] і Хоенберг [4] за допомогою встановлених Боголюбовим нерівностей [5] довели, що в плоских і одновимірних системах з неперервною симетрією не може існувати параметра порядку. Доказ Мерміна і Вагнера стосується плоскої моделі Гейзенберга, а Хоенберг довів аналогічну теорему для двовимірної надплинності і надпровідників.

Ці роботи ставили під сумнів можливість фазового переходу у двовимірних системах з неперервною симетрією. Але в цей час з'явилися роботи Стенлі, Каплана, Мура [6—8] та деяких інших авторів, у яких за допомогою чисельного аналізу системи плоских спінів було встановлено різну поведінку сприйнятливості і кореляційних функцій у низькотемпературній та високотемпературній областях і висловлено припущення про можливість фазового переходу в таких системах. До висновку про можливість залежного від температури фазового переходу у двовимірних системах дійшов і Березинський [9, 10], який звернув увагу на важливість вихрових збуджень у цих системах і можливість виникнення пов'язаних вихрових пар. Проте він не досліджував фізичну природу фазового переходу. Повне розуміння фізики фазового переходу було досягнуто в роботах Костерліца і Таулесса [11, 12], які побудували також кількісну теорію явища.

Основні ідеї дуже прості. Їх зручно продемонструвати на прикладі двовимірної надплинної плівки. При появі в плівці вихору її енергія зміниться. Зміна енергії складається з енергії вихрового кору E_0 і кінетичної енергії, пов'язаної з обертовим рухом рідини навколо вихрового кору. При обчисленні кінетичної енергії потрібно врахувати, що циркуляція вихрової швидкості квантується:

$$\oint \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = 2\pi \frac{\hbar}{m} n \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$

Зазвичай реалізується випадок $n = \pm 1$. Як наслідок, повна енергія системи дорівнює

$$E = \int \frac{\rho_s \mathbf{v}_s(\mathbf{r})}{2} d^2 r + E_0 = \frac{\pi\hbar^2\rho_s}{m^2} \ln\frac{R}{\xi} + E_0, \quad (2)$$

де R — розмір системи, ξ — розмір вихрового кору. Однак імовірність появи вихору в плівці контролюється не енергією E, а вільною енергією $F = E - TS$. Ентропія S визначається числом місць $\pi R^2 / \xi^2$ розташування вихору в плівці і дорівнює $S = \ln(\pi R^2 / \xi^2)$. Звідси випливає, що при $R / \xi \gg 1$ з логарифмічною точністю

$$F = \left(\frac{\pi \hbar^2 \rho_s}{m^2} - 2T \right) \ln \left(\frac{R}{\xi} \right). \qquad (3)$$

Вільна енергія змінює знак за температури

$$T_c = \frac{\pi \hbar^2 \rho_s (T_c)}{2m^2}. \qquad (4)$$

Вище цієї температури вільна енергія вихору негативна. Це означає, що при $T > T_c$ вільні вихори у великій кількості з'являтимуться спонтанно. За наявності однорідного надплинного потоку вихори почнуть рухатися в напрямку, нормальному до потоку. Такий рух зумовлений різницею тисків справа і зліва від вихору, який виникатиме в силу рівняння Бернуллі $\rho_s (\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_v)^2 / 2 + p = \text{const}$. Рух вихору поперек потоку призводить до зміни на 2π різниці фаз між далеко віддаленими точками в напрямку потоку. Це своєю чергою спричинює зменшення надплинної швидкості

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\frac{2\pi\hbar}{mA} n_i \hat{\mathbf{z}} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \qquad (5)$$

де A — площина плівки, $d\mathbf{r}_i / dt$ — швидкість руху i-го вихору, $\hat{\mathbf{z}}$ — нормаль до плівки, знак $n_i = \pm 1$ визначається знаком циркуляції вихору. З викладеного випливає, що T_c є температурою переходу плівки у надплинний стан.

Поява вільного вихору при $T < T_c$ в макроскопічній системі (точніше, при $\ln(R / \xi) \gg 1$) неможлива, оскільки це призводить до значного збільшення енергії системи. Однак вихори можуть з'являтися парами — вихор-антивихор (циркуляція антивихору відрізняється від циркуляції вихору знаком). Легко зрозуміти, що на відстанях, великих порівняно з відстанню між вихорами (яку ми будемо називати *розміром пари*), швидкості вихору і антивихору взаємно гасять одна одну. В результаті енергія пари дорівнює

$$E_2 = (\rho_s / 2) \int (\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2))^2 d^2 r + 2E_0 =$$
$$= \frac{2\pi\hbar^2 \rho_s}{m} \ln(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| / \xi) + 2E_0. \qquad (6)$$

Якщо система пар перебуває у стані термодинамічної рівноваги і газ пар є розрідженим (розмір пар набагато менший за відстань між парами), так що можна нехтувати перекриттям пар, легко знайти середній розмір пар (точніше, квадрат розміру). При $T < T_c$

$$\langle r^2 \rangle =$$
$$= \int \exp(-E_2(r)/T) r^2 r dr d\theta \Big/ \int \exp(-E_2(r)/T) r dr d\theta =$$
$$= \frac{2T_c - T}{T_c - T} \frac{\xi^2}{2}. \qquad (7)$$

Звідси випливає, що розмір пар зростає зі зростанням T і при $T = T_c$ прямує до нескінченності. Цей результат інтерпретується як дисоціація пар при $T = T_c$.

Отже, ми приходимо до простої фізичної картини, запропонованої Костерліцом і Таулессом. Нижче T_c в плівці є два види збуджень: квазічастинки (фонони або ротони) і вихрові пари. Квазічастинки утворюють нормальну компоненту. Їх рух, як зазвичай вважається в описі Ландау, не зачеплюється за рух надплинної компоненти. Вихрові пари роблять додатковий внесок у нормальну компоненту, але надплинний потік не захоплює пари, хоча і зумовлює орієнтацію пар у напрямку нормалі до потоку. При $T > T_c$ у системі є вільні вихори, рух яких поперек надплинного потоку призводить до його дисипації.

Зі зростанням температури пари починають перекриватися, і наведений простий розрахунок виходить за рамки своєї застосовності. Виникає питання, як врахувати перекриття пар. Для відповіді на нього Костерліц і Таулесс використали аналогію між системою квантових вихорів і двовимірним газом частинок із зарядами $\pm q$, які взаємодіють між собою за допомогою логарифмічного потенціалу. Гамільтоніан такої системи має вигляд

$$H(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = -2 \sum q_i q_j \ln \left| \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{a} \right| + 2E_0, \qquad (8)$$

де $q^2 = \pi \hbar^2 \rho_s / m$ і вважається, що $\sum q_i = 0$.

Костерліц і Таулесс враховували взаємодію вихрових пар через введення діелектричної проникності. При цьому вони звертали увагу на те, що для пар з розміром, меншим за середню відстань між парами, інші пари не впливають на взаємодію всередині пар. А для пар з розміром, більшим за середню відстань між парами, взаємодія всередині пар модифікується присутністю малих пар всередині великих пар. Ця модифікація враховується введенням діелектричної проникності $\epsilon(\mathbf{r})$, що залежить від розміру великої пари. Автори отримали диференціальне рівняння для $\epsilon(\mathbf{r})$ і встановили, що його розв'язок розпадається на два класи

$$\frac{q^2}{T\epsilon(T)} - 2 > 0 \quad \text{при } T < T_c; \tag{9}$$

$$\frac{q^2}{T\epsilon(T)} - 2 \to \infty \quad \text{при } T > T_c. \tag{10}$$

Тут використано позначення $\epsilon(T) \equiv \epsilon(T, r \to \to \infty)$. Костерліц і Таулесс інтерпретують раптову зміну в поведінці $\epsilon(T)$ як фазовий перехід при $T = T_c$ з діелектричного стану (зв'язані пари зарядів) у провідний (вільні заряди). Цей розрахунок підтверджує наявність у системі пар фазового переходу. Дивним виявляється характер сингулярності $\epsilon(T)$ при $T \to T_c - 0$

$$\left(\frac{2q^2}{T\varepsilon(r)} - 2\right)_{T \to T_c} \sim \exp\left\{-\left(\ln\frac{T_c}{T_c - T}\right)^{1/2}\right\}. \tag{11}$$

При $T = T_c + 0$ діелектрична проникність двовимірної плазми, а отже, і надплинна щільність стрибком обертається в нуль. Такі самі результати пізніше отримав Костерліц за допомогою ренорм-групового аналізу. Оскільки після появи вихорів система стає багатозв'язною, тобто змінюється її топологія, Костерліц і Таулесс назвали цей перехід *топологічним*.

Міркування, подібні викладеним, лежать в основі теорії плавлення кристалів і двовимірного магнетизму. Роль вихорів у двовимірних кристалах відіграють крайові дислокації, енергія яких, як відомо з теорії пружності, логарифмічно залежить від розміру системи. Нижче температури плавлення дислокації утворюють пов'язані пари з антидислокаціями. Вище температури плавлення в плівці є велика кількість вільних дислокацій, однак, як показали пізніше Гальперин, Нельсон [13] та Янг [14], система переходить не в рідину, а в так звану *гексатичну фазу*, в якій зв'язаними є дисклінації і антидисклінації. І лише подальше підвищення температури приводить до переходу системи в рідкий стан.

Зазначимо також, що Біслі, Мойжі, Орландо [15] та Доніак, Хуберман [16] передбачили можливість переходу Костерліца—Таулесса у двовимірних надпровідних плівках.

«Квантування» холлівської провідності і топологія

Відкриття в 1980 р. Клаусом фон Клітцингом [17] (цілочислового) квантового ефекту Холла (Нобелівська премія з фізики 1985 р. [18]) і подальше виявлення дрібного квантування холлівської провідності Денієлом Цуї та ін. [19] (Нобелівська премія з фізики 1998 р.) справили величезний вплив на розвиток уявлень про природу квантового стану матерії. Виходячи з елементарних знань про рух заряду у схрещених електричних і магнітних полях і квантування рівнів енергії електрона в сильних магнітних полях (рівні Ландау), легко дійти висновку, що для ідеального газу двовимірних (2D) електронів у тих випадках, коли повністю заповнені N рівнів Ландау, холлівська провідність дорівнює

$$\sigma_{xy} = NR_K^{-1}, \; R_K = \frac{h}{e^2}, \tag{12}$$

де R_K — стала фон Клітцинга. Більше того, в цих умовах має перетворюватися на нуль повздовжній магнітоопір ρ_{xx} і повздовжня провідність $\sigma_{xx} = \rho_{xx} / (\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2)$, оскільки при повному заповненні рівнів Ландау відсутній повздовжній струм зарядів у слабкому електричному полі. У цьому сенсі за таких щільностей електронів (або за певних значень зовнішнього магнітного поля) 2D-газ електронів поводиться як діелектрик.

Незвичайність відкриття фон Клітцинга полягала в тому, що для реальних електронів у МДП-структурах(метал-діелектрик-напівпровідник) і в гетеропереходах умова квантування (12) з величезною для фізики твердого тіла точністю (10^{-9} для сучасних вимірювань) виконується в обмеженій області змін електронної щільності (або магнітного поля). Тому виникає питання: чому реакція 2D-електронів, що взаємодіють між собою і з домішками, на зовнішнє електромагнітне поле завжди (за винятком вузької області, де $\rho_{xx} \neq 0$) така сама, як і в ідеальному фермі-газі при повному заповненні рівнів Ландау?

Якісне пояснення появи сходинок на залежності $\sigma_{xy}(B)$ полягає в тому, що при взаємодії 2D-електронів з домішками вироджені рівні Ландау (кратність виродження $\nu = B/\Phi_0$, $\Phi_0 = hc/e$ — квант потоку магнітного поля) розмиваються в зони. На краях зон вони перебувають у локалізованому стані і не дають внеску в провідність. Тільки електрони у делокалізованому стані (поблизу центрів рівнів Ландау) можуть брати участь у транспорті. У тих умовах, коли рівень Фермі (ε_F) потрапляє на локалізовані стани (знаходиться у щілині для рухливості), повністю заповнені області делокалізованих станів з енергією $\varepsilon < \varepsilon_F$ визначають холлівську провідність σ_{xy}. Тому ширина сходинок холлівської провідності визначається щілиною для рухливості. Вона є універсальною і залежить від концентрації домішок (збільшується зі зростанням концентрації). Висота сходинок $\sigma_{xy}(B)$ не залежить ані від домішок, ані від характеристик матеріалу, і добуток $\sigma_{xy}(B)R_K$ є цілим числом, якщо делокалізовані стани дають такий самий внесок у холлівську провідність, як і повністю заповнені рівні Ландау вільних електронів. Це довів Лафлін [20], ґрунтуючись: 1) на калібрувальній інваріантності; 2) існуванні щілини для рухливості; 3) припущенні про невиродженість основного стану системи.

У роботі Таулесса та ін. [21] вперше було показано, що безрозмірна холлівська провідність $\sigma_{xy}(B)R_K$ є топологічним інваріантом (інваріантом Черна) теорії. Найпростіше це продемонструвати для постійного зовнішнього магнітного поля B = const, використовуючи «зонний» опис вироджених за енергією станів у задачі Ландау. Дійсно, оператори трансляцій навіть в однорідному магнітному полі не комутують. Але якщо ввести в площину фіктивні ґратки з площею комірки, що вміщує квант потоку магнітного поля Φ_0, то трансляції на такий ґратці комутують і хвильові функції вироджених за енергією станів можна класифікувати за двовимірним квазіімпульсом $\vec{k}$ (блохівські стани $u_n(\vec{k})$, n — індекс рівня Ландау). У роботі [21] холлівську провідність, розраховану за формулою лінійного відгуку, представлено у вигляді двовимірного інтеграла по зоні Бріллюена від фіктивного магнітного поля $B_n(\vec{k})$ (його також називають *напруженістю Бері*)

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\frac{1}{2\pi}\sum_n \int_{BZ} d^2k\, B_n(\vec{k}), \qquad (13)$$

де $B_n(\vec{k}) = \vec{\nabla}_k \times \vec{A}_n(\vec{k})$, а потенціал Бері $\vec{A}_n(\vec{k})$ визначається через блохівські хвильові функції $u_n(\vec{k})$

$$\vec{A}_n(\vec{k}) = i < u_n(\vec{k}) | \nabla_k | u_n(\vec{k}) >. \qquad (14)$$

Повний потік напруженості Бері через зону Бріллюена і є в нашому випадку топологічним інваріантом Черна (N_n — ціле число)

$$N_n \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{BZ} d^2k\, B_n(\vec{k}) = 1. \qquad (15)$$

Сума N_n по всіх рівнях Ландау «n» є цілим числом N, яке для постійного зовнішнього магнітного поля дорівнює повному числу N заповнених рівнів Ландау. Формули (13)—(15) дозволяють інтерпретувати «квантування» холлівської провідності як топологічний ефект, і тому появи квантованої поперечної провідності можна очікувати не лише в постійному магнітному полі (внаслідок дрейфу заповнених рівнів Ландау). Найбільш яскравий ефект було передбачено в роботі Холдейна [22], де порушення T-інваріантності для ґратчастої 2D-системи електронів у нульовому середньому магнітному полі виявилося достатнім для існування стану з ненульовою холлівською провідністю $\sigma_{xy} = e^2/h$.

Топологічна модель Холдейна описує бесспінові електрони на гексагональній ґратці з урахуванням взаємодії як між найближчими сусідами («*nn*»), так і з наступними за найближчими сусідами («*nnn*»). Порушення T-інваріантності в моделі забезпечується введенням аарон-бомівської фази Φ_{ij} в матричний елемент тунелювання електронів між «*ппп*». При цьому передбачається, що ця фаза протилежна за знаком для двох підґраток (А і В) двовимірної стільникової структури.

Отже, топологічна модель Холдейна передбачала реалізацію квантового ефекту Холла без рівнів Ландау. Хоча зроблені при формулюванні моделі припущення (безспінові ферміони, знакозмінні фази тунельних матричних елементів) виглядають дуже штучними, передбачення моделі Холдейна нещодавно було підтверджено експериментально. Таку фазу (ізолятори Черна) було виявлено в плівках допованого хромом телуриту бісмуту (сурми) $(Bi, Sb)_2Te_3$ [23, 24], а також у системі холодних атомів у зовнішньому періодичному потенціалі, який моделює гексагональну ґратку [25].

Гіпотеза Холдейна і θ-вакуум нелінійної σ-моделі

У низьковимірних системах квантові флуктуації відіграють важливу роль у пошуку основного стану системи і для розрахунку спектра енергій низькоенергетичних збуджень. Менш очевидною є роль топологічних характеристик у вивченні властивостей низьковимірних квантових систем. У роботах Холдейна [26, 27] на прикладі одновимірних спінових ланцюжків було показано, що саме топологічні властивості моделі визначають структуру вакууму і тип низькоенергетичних збуджень.

Добре відомо, що в одновимірному ланцюжку спінів $s = 1/2$ з антиферомагнітним обміном між найближчими сусідами спектр спінових хвиль безщілинний [27]. Виникає питання: чи справедливе це твердження для цілих спінів? Для великих спінів $s \gg 1$ поведінка такої системи в континуальній межі описується нелінійною O(3) σ-моделлю, властивості якої було раніше детально вивчено у квантовій теорії поля [28—31]. Лагранжіан O(3) σ-моделі має вигляд

$$L = \frac{1}{2g}(\partial_\mu \vec{n})^2, \ \vec{n}^2 = 1, \qquad (16)$$

де g — безрозмірна стала зв'язку, $\mu = t, x$ і $c = 1$. Для антиферомагнітного спінового ланцюжка Гейзенберга поле $\vec{n}(t,x)$ описує «вектор антиферомагнетизму» (параметр порядку фази Нееля), роль швидкості світла в (16) відіграє швидкість спінових хвиль v, а стала зв'язку для ізотропного спінового ланцюжка $g^{-1} = s/2$ [26]. Завдяки умові зв'язку $\vec{n}^2 = 1$ модель є нелінійною і в $D = 1$ неєлівський параметр порядку відсутній $\langle \vec{n} \rangle = 0$. Упорядкований стан «розвалюють» сингулярні внески голдстоунівських збуджень. Квантова система, яка описується лагранжіаном (16), перебуває в неупорядкованій фазі (квантовий парамагнетик), а низькоенергетичні збудження в ній набувають маси завдяки так званому ефекту *розмірної трансмутації* (див., наприклад, [32]).

Найлегше зрозуміти механізм динамічної генерації маси в σ-моделі, переходячи до нових (слабкофлуктуюючих) спінорних змінних z^+, z

$$\vec{n} = z^+ \vec{\sigma} z, \ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

де $\vec{\sigma}$ — матриці Паулі. Комплексні поля z_α ($\alpha = 1,2$), згідно з умовою зв'язку $\vec{n}^2 = 1$, задовольняють очевидному співвідношенню $z^+ z = 1$, і вираз (17) описує відображення сфери S^2 (у просторі змінних $\vec{n}$) на сферу S^3 (у просторі змінних z_α). Множення z на довільну фазу $e^{i\varphi(x,t)}$ не змінює $\vec{n}$, тому опис у термінах z є надлишковим — з'являється додаткова калібрувальна інваріантність

$$L = \frac{1}{2g}\left|(\partial_\mu - iA_\mu) z\right|^2, \ z^+ z = 1, \ A_\mu = -iz^+ \partial_\mu z, \qquad (18)$$

де A_μ — калібрувальне поле, яке, згідно з (18), не має власної динаміки. Лагранжіан (18) у змінних z є запис O(3) нелінійної σ-моделі в так званій CP^{N-1} $(N = 2)$ формі (CP^N— проективний комплексний простір і $CP^1 \sim S^2$). При $N \gg 1$ квантову фазу CP^N моделі легко вивчити, використовуючи $1/N$-наближення при розрахунку ефективної дії моделі S_{eff} (до лагранжіану (18) додається член $\lambda(z^+ z - 1)$, який враховує умову зв'язку $z^+ z = 1$, і функціональний інтеграл за полями z розраховується точно). Умова екстремальності ефективної дії $\delta S / \delta A_\mu = 0, \ \ \delta S / \delta \lambda = 0$ дає вакуумне значення поля $A_\mu = 0$ і дозволяє знайти динамічну масу $M^2 \sim \lambda_0 g$ (щілину Δ) у спектрі збуджень z-полів

$$\Delta \simeq \Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{g}\right). \qquad (19)$$

Ця формула аналогічна виразу для щілини у спектрі електронів на рівні Фермі в пайєрлсівському діелектрику (див., наприклад, огляд [32]). У цьому випадку замість параметра ультрафіолетового обрізання Λ до (19) входить ширина W зони провідності і $\Delta \ll W$ для слабкої сталої електрон-фононного зв'язку $g \ll 1$. У квантовій теорії поля формула (19) має іншу інтерпретацію. Її можна розглядати як залежність сталої зв'язку від енергії Λ, і $g(\Lambda) \simeq \pi / \ln(\Lambda/\Delta) \to 0$ при $\Lambda \gg \Delta$ (асимптотична свобода). При цьому $\Delta \neq 0$ визначає новий енергетичний масштаб у квантовій фазі (явище розмірної трансмутації [32]).

Квадратичні поправки до вакуумних значень калібрувального поля приводять до появи динаміки у поля A_μ (emerging gauge field)

$$L_{eff} = -\frac{1}{4e_0^2} F_{\mu\nu}^2, \; e_0^2 \sim \frac{\Delta^2}{N}. \qquad (20)$$

Оскільки в $D = 1$ існує тільки електричне поле, а потенціал взаємодії ефективних зарядів e_0 лінійно залежить від відстані між ними $V = e_0^2 |x - y|$, поля «z» за нульової температури перебувають у фазі конфайнменту. За відмінних від нуля температур щілина Δ зростає зі збільшенням температури, а калібрувальне поле A_μ стає масивним (дебаївське екранування кулонівської взаємодії). Отже, строго кажучи, конфайнмент зарядів зникає і поля z стають спостережуваними.

Деконфайнмент z-полів виникає навіть за нульової температури в тому випадку, коли постійне електричне поле між парою протилежно заряджених частинок компенсується зовнішнім (фоновим) електричним полем E_θ. Дійсно, до лагранжіану (18) можна додати повну похідну

$$L_\theta = \frac{\theta}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -i \frac{\theta}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu z^+)(\partial_\nu z), \qquad (21)$$

яка не змінює рівнянь руху. Дія при такій модифікації лагранжіана змінюється, і квантова теорія залежить від характеристик θ-вакуума. Дійсно, після введення нового позначення $A_\mu / e_0 \Rightarrow A_\mu$ ефективний лагранжіан теорії набуває вигляду

$$L_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \left| (\partial_\mu - i e_0 A_\mu) z \right|^2 - M^2 z^+ z + \frac{\theta}{4\pi} e_0 \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \qquad (22)$$

У $D = 1$ квантовій електродинаміці наявність вакуумного електричного поля $E_\theta < e_0 / 2$ (в системі одиниць $\hbar = c = 1$ розмірність електричного поля $[E] = [M]$) не призводить до нестійкості вакууму (народження пар протилежно заряджених «z»-частинок).

При $\theta = \pi$ електростатична енергія за відсутності у вакуумі пари зарядів ($E = 0$) і при народженні пари протилежних за знаком зарядів на довільній відстані один від одного ($E = e_0$) одна й та сама

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{\theta e_0}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(E - \frac{\theta e_0}{2\pi}\right)^2 + \text{const}. \qquad (23)$$

Кулонівська блокада народження пар відсутня, і z-поля стають вільними. Параметр θ відіграє роль «потенціалу гейту», який знімає кулонівську блокаду народження пар зарядів при $\theta = \pi$.

У термінах $\vec{n}$-полів топологічний доданок (21) має вигляд

$$L_\theta = \frac{\theta}{8\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{abc} n_a \partial_\mu n_b \partial_\nu n_c = \frac{\theta}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \{\cos(\theta) \partial_\nu \Phi\}. \qquad (24)$$

Тут поля n_a ($a = x, y, z$) параметризовані кутовими змінними $n_x = \sin\theta(x,t) \cos\Phi(x,t)$, $n_y = \sin\theta(x,t) \sin\Phi(x,t)$, $n_z = \cos\theta(x,t)$. У двовимірному евклідовому просторі (x, y) інтеграл

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2 x \, \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{abc} n_a \partial_\mu n_b \partial_\nu n_c \qquad (25)$$

є цілим числом, яке визначає ступінь відображення S^2 (простір $\vec{n}$-полів) $\to$ S^2 (простір координат з ототожненими точками при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$). Таке відображення може бути топологічно нетривіальним (відповідна гомотопічна група $\pi_2(S^2) = z$, z — ціле число). Тому в $2D$ σ-моделі мають існувати топологічно стійкі солітони, для яких $Q \neq 0$ є топологічним зарядом. Їх можна знайти з розв'язку рівняння дуальності [29]

$$\partial_i n_a = \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ij} n_b \partial_j n_c. \qquad (26)$$

 ISSN 1027-3239. Visn. Nac. Acad. Nauk Ukr. 2016. (12)

Зручно ввести нові змінні $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, $\bar{\omega} = \omega_1 - i\omega_2$, де $\omega_j = 2n_j / (1 - n_3)$, ($j = 1, 2$), і комплексні координати $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. У нових змінних рівняння (26) набуває простого вигляду $\partial\omega / \partial\bar{z} = 0$ (рівняння Коші для аналітичної функції), і його розв'язком є

$$\omega = \left(\frac{z - z_0}{\lambda}\right)^Q, \qquad Q = n, \tag{27}$$

де z_0 — координата центру мас солітона, параметр λ визначає розмір солітона. Енергія солітона

$$E_s = \frac{1}{2g}\int d^2x(\partial_j n_a)^2 = \frac{4\pi}{g}|Q| \tag{28}$$

не залежить від його розміру. Статичний солітон $D = 2$ σ-моделі є інстантоном у $D = 1$ (топологічно стійкий розв'язок рівнянь руху в уявному часі $t \to i\tau$ зі скінченною дією [34, 35]). Наявність інстантонних розв'язків («траєкторій» у формалізмі функціонального інтегрування) означає, що тунельні процеси (флуктуації) можуть відігравати важливу роль у квантовій O(3) σ-моделі. Саме вони, як ми бачили раніше, при $\theta = \pi$ мовою «заряджених» *z*-полів приводять до деконфайнменту і їх вільного поширення. У такій фазі щілина у спектрі низьколежачих збуджень відсутня. Для O(3) нелінійної σ-моделі з $\theta = \pi$ це було точно доказано в роботі [36].

У роботах Холдейна [26, 27] при отриманні нелінійної σ-моделі з гамільтоніану Гейзенберга вперше було показано, що $\theta = 2\pi s$ (*s* — величина спіну). Виведення континуальної моделі було проведено для великих спінів $s \gg 1$, і навіть у цьому випадку цілі і півцілі спіни давали якісно різні квантові фази. Холдейн висунув гіпотезу (Haldane conjecture), що для будь-яких півцілих спінів спектр магнонів безщілинний (для $s = 1/2$ таке твердження було, звичайно, відоме, оскільки відповідна модель спінового ланцюжка точно розв'язується за допомогою анзатца Бете). Для цілих спінів система перебуває у фазі квантового парамагнетика і в спектрі магнонів з'являється щілина. Для квазіодновимірного ланцюжка спінів $s = 1$ гіпотезу Холдейна було підтверджено в експерименті [35].

Висновки

Передбачені в теоретичних роботах Холдейна нові фази квантової матерії, в описі яких важливу роль відіграють топологічні інваріанти, згодом було знайдено в експерименті (ізолятор Черна, фаза Холдейна для спінових ланцюжків з цілим спіном). Топологією стали цікавитися не лише теоретики-«польовики» (важливу роль топології в квантовій теорії поля було усвідомлено після «відкриття» інстантонів [34]), а й спеціалісти з квантової теорії конденсованих середовищ. Було введено поняття топологічного порядку (topological order) для характеристики певних станів квантової матерії, коли звичайний параметр порядку відсутній (як у квантовому ефекті Холла). Пізніше з'явилася теорія топологічних ізоляторів — нових 2D- і 3D-систем, які в об'ємі є звичайними ізоляторами, але характеризуються металевими властивостями на поверхні. Вейлівські і діраківські 3D-метали — ще один новий напрям досліджень, в якому виявилося, що теорія твердого тіла і квантова теорія поля мають багато перетинів. Вивчення майоранівських зв'язаних станів і неабелевої квантової статистики виникло із задач, де топологічно стійкі об'єкти відіграють важливу роль. Тією чи іншою мірою всі ці напрями сучасної фундаментальної фізики твердого тіла беруть свій початок у роботах, відзначених у 2016 р. Нобелівською премією з фізики.

REFERENCES

1. Peierls R. Bemerkungen über Umwandlungstemperaturen (Remarks on transition temperatures). *Helv. Phys. Acta*. 1934. **7** (Suppl. 2): 81.
2. Landau L.D. By the theory of phase transitions. *JETP*. 1937. **7**: 627.
   [Ландау Л.Д. К теории фазовых переходов. *ЖЭТФ*. 1937. Т. 7. С. 627—631].
3. Mermin N.D., Wagner H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett*. 1966. **17** (26): 1133.
4. Hohenberg P.C. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys. Rev.* 1967. **158** (2): 383.
5. Bogolyubov N.N. *Quasi-averages in problems of statistical mechanics*. (Dubna: JINR, 1961).
   [Боголюбов Н.Н. *Квазисредние в задачах статистической механики*. Препринт ОИЯИ. Д-781. Дубна, 1961].
6. Stanley H.E., Kaplan T.A. Possibility of a phase transition for the two-dimensional Heisenberg model. *Phys. Rev. Lett*. 1966. **17** (17): 913.
7. Stanley H.E. Dependence of critical properties on dimensionality of spins. *Phys. Rev. Lett*. 1968. **20** (12): 589.
8. Moore M.A. Additional evidence for a phase transition in the plane-rotator and classical Heisenberg models for two-dimensional lattices. *Phys. Rev. Lett*. 1969. **23** (15): 861.
9. Berezinskii V.L. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. I. Classical systems. *JETP*. 1971. **32** (3): 493.
   [Березинский В.Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. I. Классические системы. *ЖЭТФ*. 1971. Т. 59, вып. 3. С. 907—920].
10. Berezinskii V.L. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. II. Quantum systems. *JETP*. 1972. **34** (3): 610.
    [Березинский В.Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. II. Квантовые системы. *ЖЭТФ*. 1972. Т. 61, вып. 3. С. 1144—1156].
11. Kosterlitz J.M., Thouless D.J. Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids. (Application of dislocation theory). *J. Phys. C*. 1972. **5** (11): 124.
12. Kosterlitz J.M., Thouless D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C*. 1973. **6** (7): 1181.
13. Halperin B.I., Nelson D.R. Theory of two-dimensional melting. *Phys. Rev. Lett*. 1978. **41** (2): 519.
14. Young A.P. Melting and the vector Coulomb gas in two dimensions. *Phys. Rev. B*. 1979. **19** (4): 1855.
15. Beasley M.R., Mooij J.E., Orlando T.P. Possibility of vortex-antivortex pair dissociation in two-dimensional superconductors. *Phys Rev. Lett*. 1979. **42** (17): 1165.
16. Doniach S., Huberman B.A. Topological excitations in two-dimensional superconductors. *Phys. Rev. Lett*. 1979. **42** (17): 1169.
17. von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett*. 1980. **45** (6): 494.
18. von Klitzing K. The quantized Hall effect. In: *Nobel Lectures in Physics 1981—1990*. (World Scientific Publishing Company, 1993).
    [фон Клитцинг К. Квантованный эффект Холла. *УФН*. 1986. Т. 150, вып. 1. С. 107—126].
19. Tsui D.C., Stormer H.L., Gossard A.C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett*. 1982. **48**(22): 1559.
20. Laughlin R.B. Quantized Hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B*. 1981. **23** (10): 5632.
21. Thouless D.J., Kohmoto M., Nightingale M.P., den Nijs M. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett*. 1982. **49**(6): 405.
22. Haldane F.D.M. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the "Parity Anomaly". *Phys. Rev. Lett*. 1988. **61**(18): 2015.
23. Chang C.-Z., Zhang J., Feng X., Shen J., Zhang Z., Guo M., Li K., Ou Y., Wei P., Wang L.-L., Ji Z.-Q., Feng Y., Ji S., Chen X., Jia J., Dai X., Fang Z., Zhang S.-C., He K., Wang Y., Lu L., Ma X.-C., Xue Q.-K. Experimental observation of the quantum anomalous Hall effect in a magnetic topological insulator. *Science*. 2013. **340** (6129): 167.
24. Chang C.-Z., Zhao W., Kim D.Y., Zhang H., Assaf B.A., Heiman D., Zhang S.-C., Liu C., Chan M.H.W., Moodera J.S. High-precision realization of robust quantum anomalous Hall state in a hard ferromagnetic topological insulator. *Nat. Mater.* 2015. **14**: 473.
25. Jotzu G., Messer M., Desbuquois R., Lebrat M., Uehlinger T., Greif D., Esslinger T. Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions. *Nature*. 2014. **515**: 237.

26. Haldane F.D.M. Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet: identification with the O(3) nonlinear sigma model. *Phys. Lett. A*. 1983. **93** (9): 464.
27. Haldane F.D.M. Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets: semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Neel state. *Phys. Rev. Lett*. 1983. **50** (15): 1153.
28. Bethe H. Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. *Z. Physik*. 1931. **71**: 205.
29. Belavin A.A., Polyakov A.M. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnet. *JETP Letters*. 1975. **22** (10): 245.

    [Белавин А.А., Поляков А.М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика. *Письма ЖЭТФ*. 1975. Т. 22, вып. 10. С. 503—506].
30. Pohlmeyer K. Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. *Commun. Math. Phys*. 1976. **46**(3): 207.
31. Polyakov A.M. Hidden symmetry of the two-dimensional chiral fields. *Phys. Lett. B*. 1977. **72** (2): 224.
32. Coleman S., Weinberg E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D*. 1973. **7**: 1888.
33. Krive I.V., Rozhavskii A.S. Fractional charge in quantum field theory and solid-state physics. *Sov. Phys. Usp*. 1987. **30**: 370.

    [Криве И.В., Рожавский А.С. Дробный заряд в квантовой теории поля и физике твердого тела. *УФН*. 1987. Т. 152. С. 33—74].
34. Polyakov A.M. Compact gauge fields and the infrared catastrophe. *Phys. Lett. B*. 1975. **59**(1): 82.
35. Belavin A.A., Polyakov A.M., Tyupkin Yu.S., Schwartz A.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett. B*. 1975. **59**(1): 85.
36. Shankar R., Read N. The $\theta = \pi$ nonlinear sigma model is massless. *Nucl. Phys. B*. 1990. **336**(3): 457.
37. Buyers W.J.L., Morra R.M., Armstrong R.L., Hogan M.J., Gerlach P., Hirakawa K. Experimental evidence for the Haldane gap in a spin-1 nearly isotropic antiferromagnetic chain. *Phys. Rev. Lett*. 1986. **56**(4): 371.

Стаття надійшла 08.12.2016.

I.V. Krive, S.I. Shevchenko

Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering
of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv)

NEW PHASES OF QUANTUM MATTER AND TOPOLOGY

Nobel Prize in Physics 2016

In 2016 the Nobel Committee in physics awarded Prof. D.J. Thouless (1/2 prize), Prof. J.M. Kosterlitz (1/4 prize) and Prof. F.D.M. Haldane (1/4 prize) for “theoretical discovery of topological phase transitions and topological phases of matter”. We discuss new ideas and the results of papers where (i) topological phase transitions (Berezinskii—Kosterlitz—Thouless phase transitions) in two-dimensional condensed matter were theoretically predicted, (ii) a deep connection between quantization of the Hall conductivity in 2D systems with violated T-invariance and topological quantities (Chern invariant) was revealed (Thouless—Kohmoto—Nightingale—den Nijs), (iii) new quantum phase (Haldane phase) of spin chains with integer spin was predicted. Main attention was given to qualitative explanation of the predicted new phenomena. We follow the interconnections between the cited works of Nobel laureates and low-dimensional models of relativistic quantum field theory where the crucial role of topological invariants in the special phases of quantum matter was first noted.

***Keywords*:** topological phase transitions, topological phases, topological invariants, Hall conductivity, spin chains.